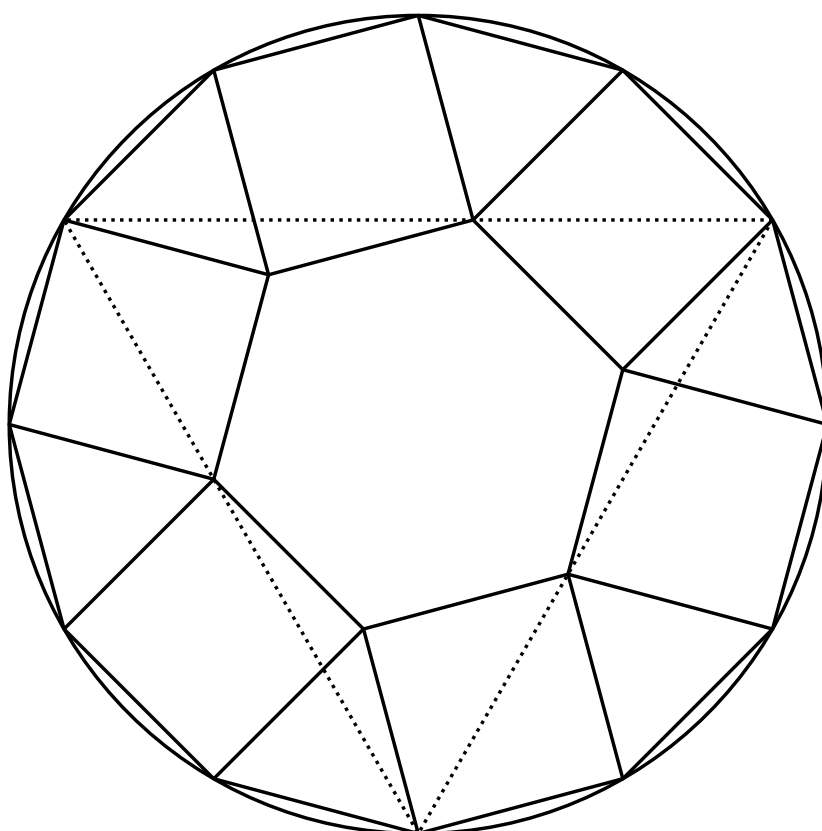


Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2026–2027

Svör og lausnir



Fyrsti hluti

1. Á bókasafni eru allar 120 bækurnar á íslensku. Hvað þyrfti að bæta við mörgum bókum á ensku svo 20% bókanna séu á ensku?

☐20

☐24

☒30

☐36

Skýring. Látum n vera fjölda bóka á ensku er bætt við. Fjöldi bóka á safninu er þá $120 + n$. Við viljum að 20% bókanna sé á ensku svo við viljum að $n = 0,2 \cdot (120 + n)$. Með því að leysa jöfnuna fyrir n fæst að $n = 30$.

2. Hver eftirfarandi stæða er ekki deilanleg með 2026?

☐ $2025^2 - 1$
☐ $27 \cdot 2025 + 27$
☐ $2025^3 + 1$
☒ $1 + 2 + \dots + 2026$

Skýring.

- $2025^2 - 1 = (2025 - 1)(2025 + 1)$, seinni sviginn er 2026, svo þessi stæða er deilanleg með 2026.
- $27 \cdot 2025 + 27 = 27(2025 + 1)$, svo þessi stæða er deilanleg með 2026 af sömu ástæðu.
- $2025^3 + 1 = (2025 + 1)(2025^2 - 2025 + 1)$.
- Þar með er síðasti krossinn réttur. Við getum séð þetta þar sem $1 + 2 + \dots + 2026$ er oddatala þar þetta er summa 1013 oddatalna og 1013 sléttra talna.

3. Hvert er meðaltal allra þriggja stafa talna?

☐500

☐500,5

☒549,5

☐550

Skýring. Þriggja stafa tölurnar eru 100, 101, $\dots$, 999. Meðaltal þeirra er einfaldlega meðaltal fyrstu síðustu tölunnar, þ.e. $(100 + 999)/2 = 549,5$.

4. Virðisaukaskattur á Íslandi er 24%. Hann leggst ofan á upphaflegt verð til að fá raunverulegt verð í búðum. Hvað þurfa búðir að veita mikinn afslátt til þess að lokaverð með virðisaukaskatti sé eins og virðisaukaskatti hafi ekki verið bætt við?

☐ 11,35%☒ 19,35%☐ 24%☐ 53,76%

Skýring. Gerum ráð fyrir að vara kosti upphaflega x . Verð vörunnar með virðisaukaskatti er þá $y = x \cdot (1 + 0,24) = 1,24 \cdot x$. Eftir að búðin gefur afslátt a þá kostar varan $y \cdot (1 - a) = (1 - a) \cdot 1,24 \cdot x$. Við viljum að þetta sé x , það er $(1 - a) \cdot 1,24 \cdot x = x$ svo $(1 - a) \cdot 1,24 = 1$. Við leysum þetta og fáum að $a = 1 - 1/1,24 = 24/124 \approx 0,1935$.

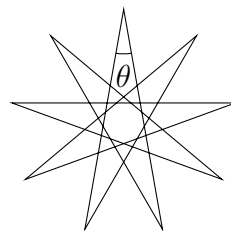
5. Við stökum stöfunum í BESSASTAÐIR. Ef við krefjumst þess að eins stafir endi hlið við hlið, B endi fremst og að R endi aftast, hvað má gera þetta á marga vegu?

☐ 720☐ 5040☐ 40320☐ 362880

Skýring. Ef eins stafir eru hlið við hlið er jafngilt að fjarlægja endurtekna stafi, því við lítum á AA sem einn staf til dæmis.

Við hundsum einnig B og R því þeim er ekki stokkað. Þá eru 6 ólíkir stafir, og stokka má 6 hlutum á $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ vegu.

6. Í níu-horna stjörnu eru allar hliðar jafnlangar og öll horn jafnstór. Eitt hornanna er merkt með θ á myndinni hér til hliðar. Finnið stærð θ í gráðum talið.

☐ 18☒ 20☐ 30☐ 36

Skýring. Við höfum 9 jafnstór horn sem spanna hring (360°). Hvert hornanna spannar því 40° hringboga. Þar sem þetta eru ferilhörn þá er $\theta = 20^\circ$.

7. Summa jákvæðra deila tölunnar 18 að framtölum og henni sjálfri frátalinni er $16 = 1 + 6 + 9$. Hver eftirfarandi talna er jöfn summu jákvæðra deila sinna að framtölum og henni sjálfri frátalinni?

☐ 28☐ 32☐ 36☒ 42

Skýring.

1. Jákvæðir deilar 28 eru 1, 2, 4, 7, 14 og 28. Þeir sem eru ekki framtölur né 28 eru 1, 4 og 14. Summa þeirra er 21.
 2. Jákvæðir deilar 32 eru 1, 2, 4, 8, 16 og 32. Þeir sem eru ekki framtölur né 32 eru 1, 4, 8 og 16. Summa þeirra er 29.
 3. Jákvæðir deilar 36 eru 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 og 36. Þeir sem eru ekki framtölur né 36 eru 1, 4, 6, 9, 12 og 18. Summa þeirra er 50.
 4. Jákvæðir deilar 42 eru 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 og 42. Þeir sem eru ekki framtölur né 42 eru 1, 6, 14 og 21. Summa þeirra er 42.
8. Tveir ólíkir hornpunktar tenings eru valdir af handahófi, þar sem allir valkostir eru jafn líklegir. Hverjar eru líkurnar að línan um þessa tvo hornpunkta liggi um miðju teningsins?

☐ $1/8$

☒ $1/7$

☐ $1/4$

☐ $1/2$

Skýring. Það eru 8 hornpunktar á teningi svo það má velja tvö þeirra á $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ vegu. Til þess að línan um punktana tvo liggi um miðju teningsins þurfa punktarnir að vera gagnstæðir. Það eru 4 pör af gagnstæðum hornpunktum svo líkurnar á að velja þannig par er $4/28 = 1/7$.

9. Ef $0 \leq b \leq a$ eru rauntölur, þá er $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ jafnt

☐ $\sqrt{2a+2b}$

☐ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

☒ $2\sqrt{a}$

☐ $2\sqrt{b}$

Skýring. Látum $x := \sqrt{a}$ og $y := \sqrt{b}$. Þá er $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{x^2+y^2+2xy} = x+y = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Eins er $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ því $a \geq b$. Af þessu sést að $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{a}$.

Einnig má fá svarið með því að stinga inn $b = 0$ og sjá að allir valkostir nema $2\sqrt{a}$ geta ekki verið réttir.

- 10.** Tvær hliðar þríhyrnings eru með lengdir 3 og 4. Hvað af eftirfarandi getur **ekki** gilt um flatarmálið A á þríhyrningnum?

$$\square A < 1$$

$$\square A = 3$$

$$\square A = 6$$

$$\boxtimes A > 7$$

Skýring. Köllum þríhyrninginn ABC og gerum ráð fyrir að $|AB| = 3$ og $|AC| = 4$. Sé α stærð hornsins $\angle BAC$ þá er flatarmál þríhyrningsins $A = \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \sin(\alpha) \cdot 6$. Nú er $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ svo $0 \leq A \leq 6$. Athugum að fyrir hvert $y \in [0, 1]$ er til $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$ þannig að $\sin(\alpha) = y$. Þetta sýnir að $A > 7$ er eina staðhæfingin sem gengur ekki.

Annar hluti

- 11.** Köllum tölu samhverfa ef hún er eins lesin áfram eða afturábak í tugakerfi. Til dæmis er 12321 samhverf en 1233 ekki. Gefið er að x sé fjögurra stafa samhverf tala og $x + 852$ er fimm stafa samhverf tala. Hvað er x ?

Svar: 9449

Skýring. Sjáum að fjögurra stafa tala plús 852 er < 11000 svo fyrstu tveir stafirnir í $x + 852$ eru 1 og 0. Eins eru þá öftustu tveir 0 og 1. Þar með er einingasætið í x ás, og því fremsti stafurinn í x líka. Drögum þá 52 frá fimm stafa tölunni til að sjá að x endi á 49, svo x er 9449. Þetta stemmir því þá er $x + 852 = 10301$.

- 12.** Jákvæðu heiltölurnar x, y hafa báðar þversummu 2026, sem sagt summa tölustafa þeirra í tugakerfi er 2026. Hver er minnsta mögulega þversumma $x + y$?

Svar: 2

Skýring. Svarið getur ekki orðið minna en 2 því þversumma tölu er alltaf með sömu leif með tilliti til 9 og talan sjálf. Þessi leif verður einmitt að vera 2. Með því að láta

$$x = \underbrace{99 \dots 91}_{225} \quad \text{og} \quad y = \underbrace{99 \dots 900}_{225} \underbrace{\dots 010}_{224}$$

Þá hafa x og y þversummuna 2026 og

$$x + y = \underbrace{100 \dots 01}_{450}$$

sem hefur þversummuna 2.

- 13.** Ef p, q, r eru framtölur þannig að $pqr = 3(p + q + r) + 1$, hvað er stærsta mögulega gildi $5p + 3q + r$?

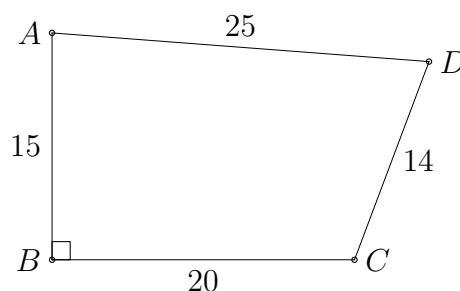
Svar: 73

Skýring. Þar sem p, q og r eru framtölur þá eru þær 2 eða oddatölur. Ef þær væru allar oddatölur þá væri pqr oddatala en $3(p + q + r) + 1$ slétt sem gengur ekki. Við getum því gert ráð fyrir að ein þeirra, segjum r sé 2. Við höfum nú $2pq = 3(p + q) + 7$. Ef p og q eru oddatölur þá er $2pq$ slétt en $3(p + q) + 7$ er oddatala. Því er önnur þeirra 2, segjum q . Við fáum nú $4p = 3p + 13$ svo $p = 13$. Lausnir jöfnunnar $pqr = 3(p + q + r) + 1$ eru því

$$(p, q, r) \in \{(13, 2, 2), (2, 13, 2), (2, 2, 13)\}$$

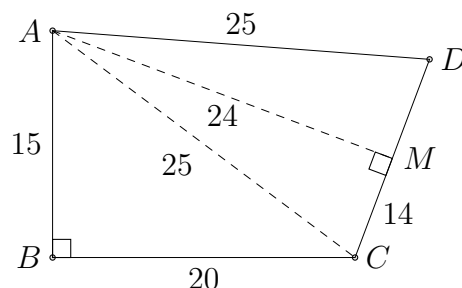
Sú lausn sem hámarkar $5p + 3q + r$ er $(p, q, r) = (13, 2, 2)$ og gefur gildið 73.

- 14.** Ferhyrningur $ABCD$ hefur hliðarlengdir 15, 20, 14 og 25, í þeirri röð. Einnig eru hliðarnar af lengdum 15 og 20 hornréttar hvor á aðra. Hvert er flatarmál ferhyrningsins?



Svar: 318

Skýring. Af reglu Pýþagórasar fæst að $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, svo $|AC| = 25$. Látum M vera miðpunkt CD . Þar sem $\triangle CAD$ er jafnarma þá er AM horrétt á CD . Regla Pýþagórasar gefur að $|AM|^2 + |CM|^2 = |AC|^2$, það er $|AM|^2 = |AC|^2 - |CM|^2 = 576$ svo $|AM| = 24$. Af þessu sést að flatarmál þríhyrninginn ABC og CAD er



$$\frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \quad \text{og} \quad \frac{14 \cdot 24}{2} = 168$$

svo flatarmál ferhyrningsins er $150 + 168 = 318$.

- 15.** Hvað eru mörg ekki tóm hlutmengi í $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ með margfeldi sem endar á 0? Til dæmis er $\{4, 7, 9, 10\}$ slíkt hlutmengi, en $\{1, 7\}$ ekki.

Svar: 752

Skýring. Fjöldi hlutmengja sem gefa slétt margfeldi er $2^{10} - 2^5$. Eins er fjöldi hlutmengja sem gefa margfeldi af 5 jafnt $2^{10} - 2^8$. Fjöldi hlutmengja sem eru margfeldi af hvorugu eru 2^4 , svo fjöldi sem er margfeldi af að minnsta kosti öðru hvoru $2^{10} - 2^4$. Þar með er svarið $(2^{10} - 2^5) + (2^{10} - 2^8) - (2^{10} - 2^4) = 752$.

Þriðji hluti

Dæmi 16

Hver er minnsta jákvæða heiltalan k þannig að

$$\sqrt{x-20} + \sqrt{k-x} = 5$$

hafi að minnsta kosti eina rauntölulausn x ?

Lausn

Setjum báðar hliðar í annað veldi og fáum

$$(x-20) + 2\sqrt{x-20}\sqrt{k-x} + (k-x) = 25$$

Styttum og færum yfir til að fá

$$2\sqrt{x-20}\sqrt{k-x} = 45 - k$$

Setjum í annað veldi aftur og fáum

$$4(x-20)(k-x) = (45-k)^2 = 2025 - 90k + k^2$$

Margföldum upp úr vinstri hlið og styttum, fáum þá

$$-4x^2 + (4k+80)x - (2025 - 10k + k^2) = 0$$

Þetta er annars stigs jafna í x , þar sem stuðlarnir eru $A = -4$, $B = 4k + 80$ og $C = -(2025 - 10k + k^2)$. Einnig vitum við að slík jafna hefur lausn þá og því aðeins að $B^2 - 4AC \geq 0$.

Því verður skilyrði okkar

$$(4k+80)^2 \geq 4 \cdot (-4) \cdot (-2025 + 10k - k^2)$$

Reiknum upp úr þessu til að fá

$$16k^2 + 640k + 6400 \geq 32400 - 160k + 16k^2$$

Þetta einfaldast loks í $800k \geq 2600$, eða $k \geq 65/2$. Þar sem k er heiltala fæst því að $k \geq 33$, því við verðum að rúna upp.

Sjá má að $k = 33$ er með lausn því þá gefur $x = 24$ að

$$\sqrt{24 - 20} + \sqrt{33 - 24} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

□

Lausn

Þar sem báðar ferningsræturnar verða að vera skilgreindar þá er $k \geq x \geq 20$. Athugum að fallið $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ er íhvolft, það er

$$\lambda_1 \cdot \sqrt{a} + \lambda_2 \cdot \sqrt{b} \leq \sqrt{\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b} \quad (16.1)$$

fyrir öll $a, b, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Þetta má sjá með því að hefja báðar hliðar í annað veldi.

Af ójöfnu Jensen fæst nú

$$\frac{5}{2} = \frac{\sqrt{x-20} + \sqrt{k-x}}{2} \leq \sqrt{\frac{(x-20) + (k-x)}{2}} = \sqrt{\frac{k-20}{2}}. \quad (16.2)$$

Af þessu fæst að $k - 20 \geq 25/2$, það er $k \geq 65/2$. Þar sem k er heiltala þá er $k \geq 33$. Fyrir $k = 33$ þá er $x = 24$ og $x = 29$ lausnir því

$$\sqrt{24 - 20} + \sqrt{33 - 24} = \sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$$

og

$$\sqrt{29 - 20} + \sqrt{33 - 29} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 3 + 2 = 5$$

svo minnsta heiltalan þannig að jafnan hafi lausn er $k = 33$. □

Dæmi 17

Talan $n(n+1)/2$ kallast n -ta þríhyrningstalan fyrir $n \geq 1$, táknuð t_n . Runa þríhyrningstala byrjar þá 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að $t_n + 2026$ sé einnig þríhyrningstala. *Vísbending: Frumþáttun 2026 er $2 \cdot 1013$.*

Lausn

Sjáum að n er slík tala þá og því aðeins að til sé jákvæð heiltala m þannig að $n(n+1)/2 + 2026 = m(m+1)/2$. Margföldum í gegn, þá er þetta $n^2 + n + 4052 = m^2 + m$. Endurritum þetta sem $4052 = m^2 - n^2 + m - n = (m-n)(m+n+1)$. Þáttum 4052 og fáum að það sé $2^2 \cdot 1013$. Síðari þátturinn verður að vera stærri, svo $1013 \mid m+n+1$ þar sem 1013 er framtala.

Þá eru 3 tilfelli sem koma til greina, $m-n$ verður að vera eitt gildanna 1, 2 eða 4. Samsvarandi gildi $m+n+1$ eru þá 4052, 2026, 1013. Í öllum þremur tilfellunum getum við leyst fyrir (n, m) því við höfum tvær jöfnur og tvær breytur í hverju tilfelli.

Í fyrsta tilfelli fæst lausnin (2025, 2027), í öðru tilfelli fæst (1011.5, 1013.5) sem er ekki heiltölulausn og í þriðja tilfelli fæst (504, 508). Staðfesta má með innsetningu að fyrsta og þriðja lausn sé gild.

Þar með er svarið $n = 504$ eða $n = 2025$. $\square$

Dæmi 18

Einhver fjarlægði allar tölurnar af klukku, svo þú veist ekkert hvernig hún á að snúa. Einnig eru vísarnir allir eins! Ef vísarnir eru með stefnur 171° , 305° og 339° frá því að vísa beint upp, hvað er klukkan? Vísarnir færast aðeins einu sinni á sekúndu, svo vísarnir á klukkunni tákna heiltölufjölda sekúndna frá klukkan tólf.

Lausn

Klukkan er 28 mínútur yfir fjögur.

Sekúnduvísirinn færir um 6° gráður á sekúndu, svo sá vísir er á heiltölufjölda gráða frá tólf, og hinir vísarnir það einnig. Við skoðum því hvað það tekur klukkutímavísirinn langan tíma að færast um 1° . Á 12 klukkustundum fer vísirinn 360° , svo hver klukkustund er 30° . Þar með er 1° jafn $1/30$ úr klukkustund, eða 2 mínútur.

Þar með verður sekúndnavísirinn að vísa beint á 12. Við vitum ekki hvaða vísir er sekúndnavísir, en hinir vísarnir eru því með stefnur $(134^\circ, 168^\circ)$, $(34^\circ, 226^\circ)$ eða $(192^\circ, 326^\circ)$ eftir því hvaða vísir er sekúndnavísirinn.

Hverjar tvær mínútur færir mínútnavísirinn um $360^\circ/60 \cdot 2 = 12^\circ$, svo mínútnavísirinn verður að fá margfeldi af 12. Eina sem kemur því til greina meðal valkostanna að ofan er 168° eða 192° .

Seinni valkosturinn gefur að klukkan sé 32 mínútur yfir eitthvað, en samsvarandi klukkutímavísirinn gæfi okkur að klukkan sé 52 mínútur yfir 10, sem gengur ekki.

Fyrri valkosturinn gefur okkur hins vegar að klukkan sé 22 mínútur yfir eitthvað, sem er sammála klukkutímavísinum sem gefur að klukkan sé 28 mínútur yfir fjögur. $\square$

Lausn

Látum h , m og s standa fyrir staðsetningu klukkustundarvísis, mínútuvisis og sekúndu vísis sem hlutfall af heilum hring. Þannig stendur 0 fyrir 12 á skífunni, $1/12$ fyrir 1 á skífunni o.s.frv. Athugum að við sjáum ekki hversu marga hringi vísir hefur snúist þannig að við getum bætt við heilum tölum við h , m og s án þess að sýnileg staða vísanna breytist. Þannig getum við litið á h , m og s sem ræðar tölur þar sem brotahlutinn táknar staðsetninguna á skífunni. Klukkan 12 : 00 : 00 vísa allir vísarnir á 12 svo við getum ákveðið að þegar $h = 0$ þá sé $m = 0$ og $s = 0$. Á 12 klukkustundum snýst klukkustundarvísirinn einn hring en mínútnavísirinn 12 hringi svo $m = 12h$. Á 60 mínútum snýst mínútuvisirinn einn hring en sekúnduvísirinn 60k hringi svo $s = 60m = 720h$.

Segjum að við höfum snúið klukkunni x réttsælis, það er 12 á klukkunni vísar í stefnu x . Þá vísar klukkustundarvísirinn í $x + h$, mínútuvísirinn í $x + m$ og sekúnduvísirinn í $x + s$. Segjum að (a, b, c) sé umröðunin á $(171/360, 305/360, 339/360) = (19/40, 61/72, 113/120)$ þannig að $(x + h, x + m, x + s) = (a, b, c) + (m, n, k)$ þar sem m, n, k eru heiltölur. Þá fæst

$$11h \equiv m - h \equiv b - a \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{og} \quad 719h \equiv s - h \equiv c - a \pmod{\mathbb{Z}} \quad (18.1)$$

Af þessu fæst

$$7909h \equiv 719 \cdot 11h \equiv 719(b - a) \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{og} \quad 7909h \equiv 11 \cdot 719h \equiv 11(c - a) \pmod{\mathbb{Z}} \quad (18.2)$$

Af þessu fæst að $719b - 719a \equiv 11c - 11a \pmod{\mathbb{Z}}$, það er $708a - 719b + 11c \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$, það er $708 - 719b + 11c$ sé heiltala. Með því að prófa allar sex umraðanirnar á (a, b, c) af $(19/40, 61/72, 113/120)$ þá fæst að $(a, b, c) = (61/72, 113/120, 19/40)$.

Athugum að $(-196) \cdot 11 + 3 \cdot 719 = 1$ svo

$$h \equiv (-196) \cdot 11h + 3 \cdot 719h \equiv (-196)(b - a) + 3(c - a) \equiv 193a - 196b + 3c \pmod{\mathbb{Z}}. \quad (18.3)$$

Nú er $193 \cdot 61/72 - 196 \cdot 113/120 + 3 \cdot 19/40 = -3533/180 \equiv 67/180 \pmod{\mathbb{Z}}$ svo við sjáum að $h = 67/180$. Af þessu sést að

$$m = 12h = 67/15 \equiv 7/15 \pmod{\mathbb{Z}} \quad \text{og} \quad s = 60h = 28 \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}} \quad (18.4)$$

Þar sem klukkustundarvísirinn ferðast $1/12$ úr hring á hverri klukkustund þá segir $12 \cdot h = 67/15 = 4 + 7/15$ að það hafa liðið 4 klukkustundir frá því að klukkan var 12. Með sama hætti segir $60 \cdot m = 28$ að klukkan er 28 mínútur yfir síðustu klukkustund. Að lokum segir $60 \cdot s = 0$ að sekúnduvísirinn vísar á 0. Af þessu sjáum við að klukkan er $04 : 28 : 00$. $\square$

Dæmi 19

Á hversu marga vegu má raða tölunum $1, 2, \dots, n$ þannig að hver tala plús númer sæti síns sé veldi af tveimur?

Til dæmis ef $n = 5$ er $1, 2, 5, 4, 3$ ein lausn. Þá er 1 í sæti 1, sem saman er 2, sem er veldi af 2. Næst er 2 í sæti 2 sem er saman 4, næst 5 í sæti 3 sem er saman 8 og svo framvegis.

Lausn

Við sönnum með þrepun að það sé alltaf nákvæmlega ein leið að raða tölunum þannig. Þetta er ljóst fyrir $n = 1$. Gerum ráð fyrir að $n \in \mathbb{N}$ og við höfum sannað þetta fyrir öll $m < n$. Látum 2^k vera stærsta veldi af 2 sem er ekki stærra en n , það er $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Setjum sem svo að talan $i \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, n\}$ sé í sæti j . Þá er

$$2^k < i + j < 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}. \quad (19.1)$$

Ef $i + j$ er veldi af 2 þá sjáum við að $i + j = 2^{k+1}$. Af þessu sést að $j = 2^{k+1} - i$. Með sama hætti sést að talan í sæti $j \in \{2^k, 2^k + 1, \dots, n\}$ er $2^{k+1} - j$. Af þessu sést að hver talnanna $i \in \{2^{k+1} - n, 2^{k+1} - n + 1, \dots, n\}$ verður að lenda í sæti $2^{k+1} - i \in \{2^{k+1} - n, 2^{k+1} - n + 1, \dots, n\}$. Af þessu sést að tölurnar $1, 2, \dots, 2^{k+1} - n - 1$ verða að lenda í sætum $1, 2, \dots, 2^{k+1} - n - 1$.

Af þrepunarforsendu er nákvæmlega ein leið að þeim þannig að summa tölu og sætis-númers hennar sé veldi af 2. Við ályktum því að það sé nákvæmlega ein leið til þess að raða tölunum $1, 2, \dots, n$ þannig að summa hvernar tölu og sætis-númers hennar sé veldi af 2.

Með þrepun á $n \in \mathbb{N}$ fæst að til er nákvæmlega ein leið að raða tölunum $1, 2, \dots, n$ þannig að summa hvernar tölu og númer sætis hennar sé veldi af 2. $\square$